Il problema a una fase. Esistenza e non-degenerazione

1. Introduzione

Dati una funzione $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ ed un insieme misurabile $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ di misura finita, definiamo

$$\mathcal{F}(u, \Omega) = \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + |\{u > 0\} \cap \Omega|.$$

1.1. **Minimi e minimi locali.** Diciamo che una funzione $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ è un minimo locale in Ω se

$$\mathcal{F}(u, K) \le \mathcal{F}(v, K) \quad \text{per ogni compatto} \quad K \subset \Omega \quad \text{ed ogni} \quad v \in H^1_{loc}(\Omega) \quad \text{tale che} \quad u - v = 0 \quad \text{in} \quad \Omega \setminus K.$$

Diciamo che una funzione $u \in H^1(\Omega)$ è un minimo in Ω se

$$\mathcal{F}(u, \Omega) \le \mathcal{F}(v, \Omega) \quad \text{per ogni} \quad v \in H^1(\Omega) \quad \text{tale che} \quad u - v \in H^1_0(\Omega).$$

1.2. **Il problema variazionale.** Consideriamo un compatto $D \in \mathbb{R}^d$ ed una funzione non-negativa $g \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Mostreremo che esiste una soluzione del problema variazionale

$$\min\Big\{\mathcal{F}(u, \mathbb{R}^d) \ : \ u = g \text{ su } D,\ u \in H^1(\mathbb{R}^d)\Big\}. \tag{1}$$

2. Funzioni subarmoniche positive

Lemma 1. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u \ge 0$ una funzione in $u \in H^1(\Omega)$ tale che:*

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \le \int_\Omega |\nabla v|^2\,dx \quad \textit{per ogni} \quad v \in H^1(\Omega) \quad \textit{tale che} \quad \begin{cases} u - v \in H^1_0(\Omega) \\ v = 0 \quad \textit{q.o. su} \quad \{u = 0\} \end{cases}.$$

Allora u è subarmonica su Ω in senso delle distribuzioni, ovvero

$$-\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla\varphi\,dx \ge 0 \quad \textit{per ogni} \quad \varphi \in C^\infty_c(\Omega)\ , \quad \varphi \ge 0 \quad \textit{su} \quad \Omega.$$

Lemma 2. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ una funzione subarmonica in Ω. Allora:*

(1) *per ogni $x_0 \in \Omega$, le funzioni*

$$r \mapsto \fint_{B_r(x_0)} u(x)\,dx \qquad e \qquad r \mapsto \fint_{\partial B_r(x_0)} u\,d\mathcal{H}^{d-1}$$

sono monotone decrescenti;

(2) *la funzione u è definita ovunque in Ω; precisamente, per ogni $x_0 \in \Omega$ esiste il limite*

$$\lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x_0)} u(x)\,dx.$$

Per definizione

$$u(x_0) := \lim_{r\to 0} \fint_{B_r(x_0)} u(x)\,dx.$$

Lemma 3. *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^d$ e $u \in H^1_{loc}(\Omega)$ una funzione non-negativa e subarmonica in Ω. Allora, u è localmente finita in Ω. In particolare, per ogni palla $B_{2r}(x_0) \subset \Omega$ si ha*

$$\|u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \le 2^d \fint_{B_{2r}(x_0)} u(x)\,dx.$$

3. Sottosoluzioni

Diciamo che una funzione $u \in H^1(\Omega)$ è una sottosoluzione in Ω se

$$\mathcal{F}(u,\Omega) \le \mathcal{F}(v,\Omega) \quad \text{per ogni} \quad v \in H^1(\Omega) \quad \text{tale che} \quad u - v \in H^1_0(\Omega) \quad \text{e} \quad v \le u \quad \text{in} \quad \Omega.$$

Lemma 4. *Esiste una costante dimensionale $\eta > 0$ tale che, se $u \in B_r$ è una sottosoluzione in B_r che soddisfa la disuguaglianza*

$$\|u\|_{L^\infty(B_r)} \le \eta\, r,$$

allora $u = 0$ in $B_{r/2}$.

Corollario 5. *Esiste una costante dimensionale $\eta > 0$ tale che, se $u \in B_r$ è una sottosoluzione in B_r che soddisfa la disuguaglianza*

$$\fint_{B_r} u(x)\, dx \le \eta\, r,$$

allora $u = 0$ in $B_{r/4}$.

4. Esistenza di minimi

Teorema 6. *Dato un compatto $D \in \mathbb{R}^d$ ed una funzione non-negativa $g \in H^1(\mathbb{R}^d)$, esiste una soluzione u del problema (1). Inoltre, ogni minimo u di (1) ha supporto limitato.*